Zur Definition von ‘Definition’

Albert J. J. Anglberger, Peter Brössel

Zusammenfassung

Wir werden in dieser Arbeit zwei neue Definitionsvorschläge von ‘Definition’ entwickeln, die folgende Eigenschaften aufweisen: (i) Sie verzichten auf die üblicherweise vorhandene Induktivität der Definition von ‘Definition’, was dazu führt, dass die Reihenfolge in der Definitionen angegeben wurden, keine Rolle mehr dafür spielt, ob es sich um *korrekte* Definitionen handelt. (ii) Sie sind sehr einfach und elegant, sodass auch eine praktische Anwendung damit verbunden ist: Wissenschafterinnen können damit nämlich von einer beliebigen Menge von Formeln sehr leicht feststellen, ob diese Menge eine Menge korrekter Definitionen ist und was als Grundvokabular dafür vorausgesetzt werden muss. (iii) Aus einem Definitionsvorschlag ergibt sich ein Algorithmus, mit dessen Hilfe eine Anordnung gefunden werden kann, die eine Menge von Formeln zu einer Folge korrekter Definitionen im “alten” Sinne macht. (iv) Die Definitionsvorschläge sind zu der Definierbarkeit im “klassischen” Sinne äquivalent. Somit ergänzt dieser Beitrag die klassische Definitionstheorie.

1 Einleitende Bemerkungen

1.1 Programm

Was eine Definition ist, wird üblicherweise induktiv definiert: Man startet mit einem Grundvokabular auf Basis dessen ein erster Ausdruck definiert werden kann. Auf Basis des Grundvokabulars zusammen mit dem ersten definierten Ausdruck darf dann ein nächster Ausdruck definiert werden usw. Eine Folge von Formeln ist in diesem Rahmen genau dann eine Folge *korrekter Definitionen*, wenn sie die eben geschilderte Bedingung und noch einige zusätzliche syntaktische Bedingungen erfüllt und ein Ausdruck ist genau dann *definierbar* rel. zu einer Folge von Formeln und einem Grundvokabular, wenn sich eine Folge von Formeln so anordnen lässt, dass sie eine Folge korrekter Definitionen rel. zu dem Grundvokabular ist. *Ob* man eine Folge von Formeln wie gefordert anordnen kann, ist natürlich – solange es sich um endlich viele Formeln handelt – entscheidbar. Auf die Frage *wie* man sie anordnen kann, gibt es möglicherweise mehrere Antworten.

In den Abschnitten 3 und 4 dieser Arbeit wollen wir zwei neue und einfache Definitionen von ‘Definition’ vorstellen, die folgendes erfüllen: Erstens wird auf die üblicherweise vorhandene Induktivität verzichtet, was zur Folge hat, dass unsere Definitionen sehr einfach und elegant werden. Zweitens ergibt sich aus der Definition in Abschnit ein Algorithmus, der uns sagt, wie man eine Folge von Formeln anordnen kann, sodass diese eine Folge *korrekter Definitionen* im ersten Sinne wird, d.h. ein Algorithmus der die Frage nach dem *wie* beantwortet.

Speziell der letzte Definitionsvorschlag ist so einfach, dass jede Wissenschafterin ihn sofort in der Praxis anwenden kann, um zu überprüfen, ob ein Menge – wie wir sehen werden, spielt die Reihenfolge der Formeln keine entscheidende Rolle mehr – von Formeln, eine Menge korrekter Definitionen ist.

Die neuen Definitionsvorschläge erweisen sich als äquivalent zu der Definierbarkeit im “alten” Sinne. Hierfür werden wir zu Beginn dieser Arbeit (in Abschnitt 2) den klassischen Ansatz rekonstruieren.

1.2 Vorbemerkungen

Wir definieren ‘Definition’ für eine prädikatenlogische Sprache $\mathcal{L}$, wobei $\mathcal{L}$ an nicht-logischen Zeichen nur Prädikatkonstanten enthält. Die Einschränkung auf Prädikate soll nur der einfacheren Lesart dienen, ist folglich aus formalen Gründen keineswegs notwendig. An späterer Stelle werden wir sehen, wie sich unsere Vorschläge einfach ausdehnen ließen (sodass z.B. Individuenkonstanten vorkommen dürfen, etc.). Die Einschränkung auf eine formale Sprache ist deshalb notwendig, weil nur bei einer solchen bestimmte relevante Eigenschaften (Stellenzahl von Prädikaten etc.) exakt festgelegt sind.

2 Der klassische Ansatz rekonstruiert

Die klassische Auffassung von *korrekten Definitionen* lässt sich mit Suppes (siehe dazu auch [2, S. 24], [5, S. 116-137], [1] und [3]) wie folgt beschreiben:

> "An equivalence D introducing a new n-place relation Symbol P is a proper definition in a theory if and only if D is of the form $P(v_1,...,v_n) \leftrightarrow S$, and the following restrictions are satisfied: (i) $v_1,...,v_n$ are distinct variables; (ii) S has no free variables other than $v_1,...,v_n$; and (iii) S is a formula in which the only non-logical constants are primitive symbols and previously defined symbols of the theory." [6, S. 156]

Diese *primitive symbols* werden wir im folgenden auch *Grundausdrücke* nennen und diese Definition von 'Definition' werden wir als die *klassische Auffassung von Definition* (kurz: *KAD*) bezeichnen. Betrachten wir nun folgende Kette von Formeln (mit '$\in$' als Grundausdruck):

(D_1) $x \subset y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y$

(D_2) $x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$

(D_3) $x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y$

Die Folge D_1, D_2, D_3 wäre laut *KAD* keine Folge korrekter Definitionen, da in D_1 ein Ausdruck vorkommt ('$\subseteq$'), der erst später (nämlich in D_2) definiert wird. Solche Folgen von (laut *KAD vermeintlichen*) Definitionen kommen aber in den Wissenschaften regelmäßig vor und das auch mit gutem Grund: Erstens erleichtert eine solche Abfolge oft das Verständnis definierter Ausdrücke und zweitens werden dadurch die angestrebten Desiderata der Eliminierbarkeit und Non-Kreativität nicht gefährdet. Wir werden daher 'korrekte Definitionen' in dieser etwas "weiteren" Bedeutung verwenden und wir werden unsere Definitionen dahingehend entwickeln, dass sie diese "weite" Bedeutung von korrekten Definitionen ausdrücken.

Innerhalb *KAD* behilft man sich nun damit, dass man sagt, diese Folge sei unproblematisch, da sie so angeordnet werden *kann*, dass sie eine Folge korrekter Definitionen ist (vgl. [5, S. 116f]). Eine solche Anordnung könnte beispielsweise so aussehen (mit '$\in$' als Grundausdruck):

(D_1) $x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$

(D_2) $x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y$

(D_3) $x \subset y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y$

Genau darum soll es in Definition gehen, d.h. Definition gibt an, wann eine Menge von Formeln so angeordnet werden kann, dass diese eine laut *KAD* Folge korrekter Definitionen ist. Wie weiter oben bereits erwähnt, spielt die Menge der Grundausdrücke eine wesentliche Rolle dafür, ob eine Folge von Formeln eine Folge korrekter Definitionen ist. Folglich werden wir unsere Definition auch auf eine Menge von

Grundausdrücken, in unserem Fall ist das eine Menge von Prädikatkonstanten, relativieren müssen, d.h. wir definieren, wann eine Menge von Formeln (relativ zu einem Grundvokabular) so angeordnet werden kann, dass es sich dabei um eine Folge von korrekten Definitionen (relativ zu dem Grundvokabular) in *KAD* handelt.

Definition 2.1 *D enthält nur korrekte Definitionen*$_1$ *rel. zu G gdw es gibt* $D_1,\ldots,D_n$, *sodass gilt:*

1. $D = \{D_1,\ldots,D_n\}$ *und*
2. *G eine Menge von Grundausdrücken ist und*
3. *für alle i* ($1 \leq i \leq n$) *gilt: Es gibt ein Prädikat P, eine Formel* A_i *und Variablen* $x_1,\ldots,x_m$ *sodass gilt:* D_i *ist von der Form* $Px_1\ldots x_m \leftrightarrow A_i$, *wobei höchstens* $x_1,\ldots,x_m$ *in* A_i *frei vorkommen,* $x_1,\ldots,x_m$ *paarweise verschieden sind,* $P \notin G$ *und P nicht in* A_i *vorkommt und*
4. *es gibt kein j* ($1 \leq j \leq n$) *und kein i* ($1 \leq i \leq n$) *gibt, sodass* $D_i \neq D_j$ *und P kommt im Vorderteil von* D_j *und* D_i *vor und*
5. *alle Prädikate P die in D vorkommen sind zulässig rel. zu D und G wobei gilt: P ist zulässig rel. zu D und G gdw*
   (a) $P \in G$ *oder*
   (b) *es gibt ein i* ($1 \leq i \leq n$) *sodass gilt:* D_i *hat die Form* $Px_1\ldots x_m \leftrightarrow A_i$ *und alle Prädikate in* A_i *sind zulässig rel. zu* $D\backslash\{D_i\}$ *und G*
   (c) *sonst ist nichts ein zulässiges Prädikat.*

Die Bedingungen 3 und 4 werden wir im folgenden auch die *syntaktischen Bedingungen* nennen. Diese müssen erfüllt sein, um Non-Kreativität und Eliminierbarkeit zu gewährleisten.[1] Durch Bedingung 4 schließen wir Mehrfachdefinitionen aus.

Folgende Beispiele sollen der Erläuterung dienen. Wir betrachten dabei immer die gleiche Menge (folglich ist die Reihenfolge der Formeln nicht mehr dafür ausschlaggebend, ob es sich um *korrekte* Definitionen handelt) von Formeln, variieren aber das Grundvokabular, sodass wir von korrekten zu unkorrekten Definitionen kommen.

Beispiel 2.1

(D_1) $x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$

(D_2) $x \subset y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y$

(D_3) $x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y$

Sei $D=\{D_1, D_2, D_3\}$.

Fall 1. Sei G_1={‘ ∈’, ‘=’ }. *D* ist rel. zu G_1 eine Menge von korrekten Definitionen$_1$ weil: D_1, D_2 und D_3 erfüllen Bedingungen 3 und 4 der Definition 2.1 und weiters gilt, dass alle Prädikate, die in *D* vorkommen,

[1]Für eine genauere Erläuterung dieser Bedingungen siehe beispielsweise [5, S. 102-138].

zulässige Prädikate rel. zu D und G_1 sind, da: '$\in$' und '=' sind zulässig, da sie beide Grundausdrücke sind. Damit wissen wir auch, dass '$\subseteq$' und '$\neq$' zulässige Prädikate sind (sie werden nur mit Hilfe von Grundausdrücken definiert), was '$\subset$' zu einem zulässigen Prädikat macht.

Fall 2. Sei G_2={'='}. D ist rel. zu G_2 *keine* Menge von korrekten Definitionen$_1$, weil in D ein nicht zulässiges Prädikat rel. zu D und G_2 (nämlich '$\in$') vorkommt. '$\in$' ist kein zulässiges Prädikat, da es weder im Grundvokabular vorkommt, noch definiert wird.

Im folgenden werden wir definieren, wann eine Menge von Formeln nur korrekte Definitionen enthält. Dieser Definition liegt folgende Idee zugrunde: Eine Menge von Formeln enthält nur korrekte Definitionen genau dann, wenn es eine Menge von Grundausdrücken gibt, relativ zu der die Menge eine Menge korrekter Definitionen$_1$ ist. Wir halten also fest:

Definition 2.2 *D enthält nur korrekte Definitionen$_1$ genau dann, wenn es eine Menge von Prädikatkonstanten G gibt, sodass D relativ zu G nur korrekte Definitionen$_1$ enthält.*

3 Definition mit definitorischer Abhängigkeit

Die Definition von 'Definition' dieses Abschnittes basiert auf der Idee, dass durch eine Definition eine Beziehung zwischen den darin enthaltenen Ausdrücken gestiftet wird. Wenn ein Prädikat P' mit Hilfe eines Prädikates P definiert wird, dann ist P' von P "irgendwie" *abhängig* (diese Abhängigkeit werden wir später *direkte definitorische Abhängigkeit* nennen). Des Weiteren gilt: Wenn P' dafür verwendet wird, ein Prädikat P'' zu definieren, dann vererbt sich P's Abhängigkeit von P auch auf P'', d.h. P'' ist dann auch "irgendwie" *abhängig* von P (diese und die direkte Abhängigkeit werden wir als *definitorische Abhängigkeit* einführen). Diese Ausdrücke lassen sich formal exakt wie folgt definieren:

Definition 3.1 *P ist direkt def. abhängig von P' rel. zu D gdw es gibt $D_1,...,D_n$ sodass gilt:*

1. *$D = \{D_1,...,D_n\}$ und*
2. *es gibt ein i ($1 \le i \le n$), eine Formel A_i und Variablen $x_1,...,x_m$ sodass gilt: D_i ist von der Form $Px_1...x_m \leftrightarrow A_i$, wobei höchstens $x_1,...,x_m$ in A_i frei vorkommen, $x_1,...,x_m$ paarweise verschieden sind und P' in A_i vorkommt.*

Definition 3.2 *P ist def. abhängig von P' rel. zu D gdw es gibt $D_1,...,D_n$ sodass gilt:*

1. *$D = \{D_1,...,D_n\}$ und*
2. *P ist direkt def. abhängig von P' rel. zu D oder*
3. *es gibt eine Folge von Prädikaten $\langle P_1,..., P_l\rangle$ sodass P_i ist direkt definitorisch abhängig von P_{i+1} rel. zu D, für alle $1 \le i \le l-1$, $P_1=P$ und $P_l=P'$.*

Auf Basis dieser Begriffe können wir definieren, was es heißt, dass eine Menge von Formeln nur korrekte Definitionen enthält.

Definition 3.3 *D enthält nur korrekte Definitionen$_2$ gdw es gibt $D_1,...,D_n$ sodass gilt:*

1. *$D = \{D_1,...,D_n\}$ und*
2. *für alle i ($1 \leq i \leq n$) gilt: Es gibt ein Prädikat P, eine Formel A_i und Variablen $x_1,...,x_m$ sodass gilt: D_i ist von der Form $Px_1...x_m \leftrightarrow A_i$, wobei höchstens $x_1,...,x_m$ in A_i frei vorkommen, $x_1,...,x_m$ paarweise verschieden sind und*
3. *es gibt kein j ($1 \leq j \leq n$) und kein i ($1 \leq i \leq n$) gibt, sodass $D_i \neq D_j$ und P kommt im Vorderteil von D_j und D_i vor und*
4. *für kein Prädikat P gilt: P ist def. abhängig von P rel. zu D*

Eine Menge von Formeln, die die üblichen syntaktischen Bedingungen von Definitionen erfüllen, ist nun genau dann eine Menge korrekter Definitionen$_2$, wenn kein Prädikat von sich selbst definitorisch abhängig ist. Mit dieser Definition schließt man offensichtlich Definitionszirkel aller Art aus.

Beispiel 3.1

(D_1) $x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$

(D_2) $x \subset y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y$

(D_3) $x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y$

Sei $D=\{D_1, D_2, D_3\}$.

Alle $D_i \in D$ erfüllen Bedingungen 2 und 3 der Definition 3.3. Aus D ergeben sich als direkte def. Abhängigkeiten: ‘$\subseteq$’ von ‘$\in$’, ‘$\subset$’ von ‘$\subseteq$’, ‘$\subset$’ von ‘$\neq$’ und ‘$\neq$’ von ‘$=$’; als def. abhängig ergeben sich alle direkten def. Abhängigkeiten und zusätzlich ‘$\subset$’ von ‘$\in$’ und ‘$\subset$’ von ‘$=$’. Da es kein Prädikat gibt, das von sich selbst definitorisch abhängig ist, folgt somit, dass D nur korrekte Definitionen$_2$ enthält.

Beispiel 3.2

(D_1) $x \subseteq y \leftrightarrow x \subset y \vee x = y$

(D_2) $x \subset y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y$

(D_3) $x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y$

Sei $D=\{D_1, D_2, D_3\}$.

Alle $D_i \in D$ erfüllen Bedingungen 2 und 3 der Definition 3.3. Aus D ergeben sich als direkte def. Abhängigkeiten: ‘$\subseteq$’ von ‘$\subset$’, ‘$\subseteq$’ von ‘$=$’, ‘$\subset$’ von ‘$\subseteq$’, ‘$\subset$’ von ‘$\neq$’, ‘$\neq$’ von ‘$=$’; D ist nun keine Menge von korrekten Definitionen, da es ein Prädikat gibt, das von sich selbst definitorisch abhängig ist (nämlich ‘$\subseteq$’). Warum gibt es ein solches Prädikat? Weil für die Folge von Prädikaten $\langle$‘$\subseteq$’, ‘$\subset$’, ‘$\subseteq$’$\rangle$ gilt: Jedes Folgeglied ist vom jeweils nächsten direkt def. abhängig, was ergibt, dass ‘$\subseteq$’ von ‘$\subseteq$’ definitorisch abhängig ist.

Angenommen, wir haben eine Menge vor uns, welche nur korrekte Definitionen$_2$ enthält. Dann würden wir vielleicht auch gerne wissen, welche Ausdrücke wir als Grundausdrücke voraussetzen müssen, um einen stufenweisen Aufbau – so wie in der Einleitung geschildert und von *KAD* gefordert – von Vokabular und Definitionen angeben zu können. Die Antwort darauf lautet: Etwas ist ein Grundausdruck genau dann, wenn es in der Menge der Definitionen vorkommt und von keinem Ausdruck direkt definitorisch abhängig ist. Dies bringen wir in folgender Definition zum Ausdruck.

Definition 3.4 *P ist ein definitorischer Grundausdruck$_2$ für D gdw*

1. *P ist ein Prädikat, welches in D vorkommt und*
2. *D enthält nur korrekte Definitionen$_2$ und*
3. *es gibt kein Prädikat P', sodass P direkt def. abhängig von P' relativ zu D ist.*

Betrachten wir das nun wieder an unserem wohlbekannten Beispiel!

Beispiel 3.3

$(D_1)\ x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$

$(D_2)\ x \subset y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y$

$(D_3)\ x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y$

Sei $D=\{D_1, D_2, D_3\}$.

Wie wir aus Beispiel 3.1 wissen, enthält *D* nur korrekte Definitionen$_2$. Wir können uns folglich fragen, was die definitorischen Grundausdrücke$_2$ für *D* sind. '⊆', '⊂' und '≠' können es nicht sein, da alle von mind. einem Ausdruck direkt definitorisch abhängig sind. Es bleiben als Prädikate in *D* also noch '∈' und '=' übrig, und da diese von keinem Prädikat direkt definitorisch abhängig sind, zählen '∈' und '=' zu den definitorischen Grundausdrücken$_2$ für *D*. Das sind genau die definitorischen Grundausdrücke, die wir in Beispiel 2.1 angegeben haben, sodass *D* nur korrekte Definitionen$_1$ rel. zu der Menge dieser Grundausdrücke (G_1) enthielt.

Was die Beziehung zwischen der Definition aus Abschnitt 2 und der Definition dieses Abschnitts betrifft, lässt sich zeigen, dass sie genau die gleichen Mengen von Formeln als Mengen korrekter Definitionen auszeichnen, d.h. in anderen Worten, äquivalent sind. Diese Beziehung halten wir in folgendem Theorem fest:

Theorem 1 *D enthält nur korrekte Definitionen$_1$ genau dann, wenn D nur korrekte Definitionen$_2$ enthält.*

Da die Beziehung der definitorischen Abhängigkeit eine Relation (in einer Menge von Prädikatkonstanten) ist und Relationen als Graphen aufgefasst werden können, dürfen wir auf diese Relation die Graphentheorie anwenden. Wie sich zeigt, ergibt sich aus dieser Anwendung ein interessantes Ergebnis: Es gibt einen Algorithmus, der uns für eine Menge von Definitionen$_2$ sagt, wie wir sie anordnen müssen, um sie zu einer Folge korrekter Definitionen im Sinne *KAD*s zu machen – in [4] trägt dieser Algorithmus den Namen

Algorithmus zum Test eines Digraphen auf Kreisfreiheit und Berechnung einer zulässigen Reihenfolge (Kahn 1962) – und auch für eine genauere Beschreibung und dessen Anwendung verweisen wir auf [4, S. 184], wo er anhand von mehreren Beispielen erläutert wird.

4 Definition mit einer Funktion nach *N*

Der dritte und letzte Definitionsvorschlag erwuchs aus dem der definitorischen Abhängigkeit. Die Relation der definitorischen Abhängigkeit hat nämlich – angewandt auf eine Menge, welche nur korrekte Definition enthält – einige "praktische" mathematische Eigenschaften: So gilt beispielsweise die Transitivität, die Asymmetrie und die Irreflexivität, alles Eigenschaften, die auch von der mathematischen >-Relation gelten. In der Definition wird sich diese Parallele wie folgt niederschlagen: Eine Menge enthält genau dann nur korrekte Definitionen$_3$, wenn (i) die üblichen syntaktischen Bedingungen erfüllt sind und (ii) es eine Funktion gibt, die allen Prädikaten, die im Vorderteil einer Äquivalenzformeln stehen (und folglich definiert werden sollen), eine größere natürliche Zahl zuordnet, als denen, die im Hinterteil dieser Formel stehen.

Definition 4.1 *D enthält nur korrekte Definitionen$_3$ gdw es gibt $D_1,...,D_n$ sodass gilt:*

1. *$D = \{D_1,...,D_n\}$ und*
2. *für alle i ($1 \leq i \leq n$) gilt: Es gibt ein Prädikat P, eine Formel A_i und Variablen $x_1,...,x_m$ sodass gilt: D_i ist von der Form $Px_1...x_m \leftrightarrow A_i$, wobei höchstens $x_1,...,x_m$ in A_i frei vorkommen, $x_1,...,x_m$ paarweise verschieden sind und*
3. *es gibt kein j ($1 \leq j \leq n$) und kein i ($1 \leq i \leq n$) gibt, sodass $D_i \neq D_j$ und P kommt im Vorderteil von D_j und D_i vor und*
4. *es gibt eine Fkt. f von allen Prädikaten P und P' die in D vorkommen nach N, sodass für alle j ($1 \leq j \leq n$) gilt: Wenn P im Vorderteil von D_j vorkommt und P' in A_j (dem Hinterteil von D_j) vorkommt, dann gilt: $f(P)>f(P')$.*

Beispiel 4.1

(D_1) $x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$

(D_2) $x \subset y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y$

(D_3) $x \neq y \leftrightarrow \neg x = y$

Sei $D=\{D_1, D_2, D_3\}$.

Alle $D_i \in D$ erfüllen Bedingungen 2 und 3 der Definition 4.1. Zu zeigen ist nun, dass es eine Funktion von den Prädikaten (die in *D* vorkommen) nach *N* gibt, die die zweite Bedingung von Definition erfüllt. Sei *f* nun folgende Funktion: f('=') = 1, f('∈') = 1, f('≠') = 2, f('⊆') = 2, f('⊂') = 3. *f* erfüllt die Bedingung 2 der Definition und damit ist gezeigt, dass *D* eine Menge von korrekten Definitionen ist.

Beispiel 4.2

$(D_1)\ x \subseteq y \leftrightarrow x \subset y \vee x = y$

$(D_2)\ x \subset y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y$

$(D_3)\ x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y$

Sei $D=\{D_1, D_2, D_3\}$.

Alle $D_i \in D$ erfüllen Bedingungen 2 und 3 der Definition 4.1. Zu zeigen ist nun, dass es *keine* Funktion von den Prädikaten (die in *D* vorkommen) nach *N* gibt, die die zweite Bedingung von Definition erfüllt. Angenommen, es gäbe eine solche Funktion, und *f* sei diese, dann gilt:

(i) $f(`\subseteq') > f(`\subset')$ (aufgrund von D_1 und Bed. 2 der Definition) und

(ii) $f(`\subset') > f(`\subseteq')$ (aufgrund von D_2 und Bed. 2 der Definition),

was sich aber widerspricht.

Aus den angegebenen Beispielen wird auch die praktische Anwendbarkeit dieses Vorschlags ersichtlich. Wenn eine Wissenschafterin sich fragt, ob eine Menge von ihr vorgeschlagenen Definitionen korrekt ist, kann sie kann dies mit Hilfe dieser Definitionen einfach überprüfen: Erstens überprüft sie die ob die syntaktischen Bedingungen (damit meinen wir die Bedingungen 2 und 3 der Definition) erfüllt sind. Zweitens versucht sie den in ihren Definitionen enthaltenen Prädikaten natürliche Zahlen so zuzuordnen, dass alles, was definiert werden soll, eine größere Zahl bekommt, wie das, wodurch es definiert werden soll. Findet sie eine solche Zuordnung, dann ist die Menge eine Menge korrekter Definitionen$_3$, stellt sich allerdings heraus, dass es eine solche Zuordnung nicht geben kann, ist diese Menge keine Menge korrekter Definitionen$_3$.

Auch bei korrekten Definitionen$_3$ würden wir gerne wissen, was als Grundvokabular vorausgesetzt werden muss. Eine Antwort hierauf liefert uns nachfolgende Definition.

Definition 4.2 *P ist ein definitorischer Grundausdruck*$_3$ *für D gdw*

1. *D enthält nur korrekte Definitionen*$_3$ *und*
2. *es gibt eine Fkt. f von allen Prädikaten P* und P' die in D vorkommen nach N, sodass für alle* $D_i \in D$ *gilt: Wenn P* im Vorderteil von* D_i *vorkommt und P' in* A_i *(dem Hinterteil von* D_i*) vorkommt, dann gilt:* $f(P^*)>f(P')$ *und* $f(P)=1$.

Ein Prädikat *P* ist also genau dann ein definitorischer Grundausdruck$_3$ für *D*, wenn es eine Funktion gibt, die zeigt, dass *D* eine Menge von korrekten Definitionen$_3$ ist und die *P* den Wert 1 zuordnet. Auch diese Definition wollen wir an einem Beispiel illustrieren.

Beispiel 4.3

$(D_1)\ x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$

$(D_2)\ x \subset y \leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y$

$(D_3)\ x \neq y \leftrightarrow \neg\, x = y$

Sei $D=\{D_1, D_2, D_3\}$.

Aus Beispiel 4.1 wissen wir, dass D nur korrekte Definitionen$_3$ enthält. Sei f nun folgende Funktion: f('=') = 1, f('∈') = 1, f('≠') = 2, f('⊆') = 2, f('⊂') = 3. f zeigt erstens, dass D nur korrekte Definitionen$_3$ enthält und zweitens, dass '∈' und '=' definitorische Grundausdrücke$_3$ für D sind. Das sind erneut genau die Ausdrücke, die wir bereits in Beispiel 2.1 als Grundausdrücke benötigten.

Die Definition dieses Abschnitts ist äquivalent zu der Definition aus Abschnitt 3, was wir wieder in einem Theorem festhalten:

Theorem 2 *D enthält nur korrekte Definitionen*$_2$ *genau dann, wenn D nur korrekte Definitionen*$_3$ *enthält.*

Aus Theorem 1 und Theorem 2 ergibt sich die Äquivalenz von der ersten Definition mit dem letzten Vorschlag:

Theorem 3 *D enthält nur korrekte Definitionen*$_1$ *genau dann, wenn D nur korrekte Definitionen*$_3$ *enthält.*

Zusammengefasst bedeutet das, dass alle Definitionen von 'Definition' dieses Aufsatzes – eine "weitere" Bedeutung von 'Definition' im Sinne von *KAD*, die Definition mit definitorischer Abhängigkeit und die Definition mit Funktion nach *N* – exakt die gleichen Dinge als korrekte Definitionen auszeichnen.

Literatur

[1] Essler Wilhelm K., *Wissenschaftstheorie I: Definition und Reduktion* (2. Aufl.), Karl Albert, Freiburg/München 1982

[2] Carnap Rudolf, *The logical syntax of language* (5. Auflage), Routledge, London 1959

[3] Kleinknecht Reinhard, *Grundlagen der modernen Definitionstheorie*, Scriptor, Königstein/TS 1979

[4] Linhart Johann, *Diskrete Mathematik*, 3.Jänner 2007, <http://www.sbg.ac.at/mat/staff/linhart/diskrete2.pdf>

[5] Savigny Eike von, *Grundkurs im wissenschaftlichen Definieren* (5. Auflage), Deutscher Taschenbuch Verlag, München 1980

[6] Suppes Patrick, *Introduction to Logic*, D. van Nostrand Company, Princeton New Jersey 1957